

## Aula de Física II - Estática dos Fluidos

Prof.: Leandro Aguiar Fernandes  
(lafernandes@iprj.uerj.br)

Universidade do Estado do Rio de Janeiro  
Instituto Politécnico - IPRJ/UERJ  
Departamento de Engenharia Mecânica e Energia  
Graduação em Engenharia Mecânica/Computação

11 de agosto de 2010

# Conceitos Fundamentais

# Conceitos Fundamentais

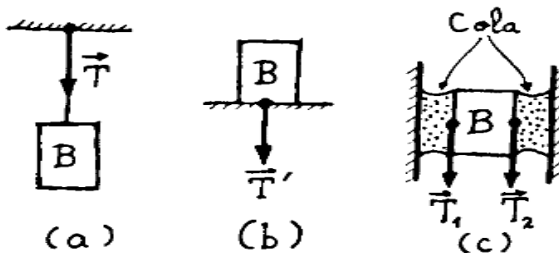
- Fluido  $\mapsto$  Facilidade de Deformação  $\mapsto$  Líquidos e Gases

# Conceitos Fundamentais

- Fluido  $\mapsto$  Facilidade de Deformação  $\mapsto$  Líquidos e Gases
- Tensão (Força/Unid.Área)  $\mapsto$  Tensões Normais e Tangenciais

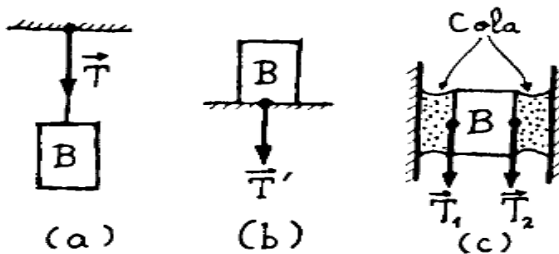
# Conceitos Fundamentais

- Fluido  $\mapsto$  Facilidade de Deformação  $\mapsto$  Líquidos e Gases
- Tensão (Força/Unid.Área)  $\mapsto$  Tensões Normais e Tangenciais



# Conceitos Fundamentais

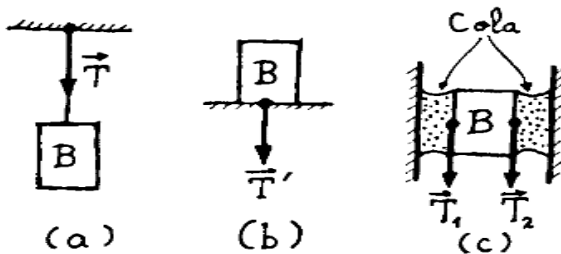
- Fluido  $\mapsto$  Facilidade de Deformação  $\mapsto$  Líquidos e Gases
- Tensão (Força/Unid.Área)  $\mapsto$  Tensões Normais e Tangenciais



(a) Tensão Normal de Tração;

# Conceitos Fundamentais

- Fluido  $\mapsto$  Facilidade de Deformação  $\mapsto$  Líquidos e Gases
- Tensão (Força/Unid.Área)  $\mapsto$  Tensões Normais e Tangenciais

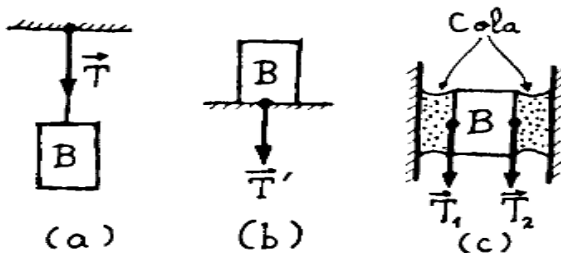


(a) Tensão Normal de Tração;

(b) Tensão Normal de Compressão;

# Conceitos Fundamentais

- Fluido  $\mapsto$  Facilidade de Deformação  $\mapsto$  Líquidos e Gases
- Tensão (Força/Unid.Área)  $\mapsto$  Tensões Normais e Tangenciais



- (a) Tensão Normal de Tração;  
 (b) Tensão Normal de Compressão;  
 (c) Tensão Tangencial de Cisalhamento.



## Resposta às Tensões Tangenciais:

## Resposta às Tensões Tangenciais:

- Corpo Rígido  $\mapsto$  Deforma-se até atingir o Equilíbrio  $\mapsto$  Deformação Elástica

## Resposta às Tensões Tangenciais:

- Corpo Rígido  $\mapsto$  Deforma-se até atingir o Equilíbrio  $\mapsto$  Deformação Elástica
- Fluido  $\mapsto$  Não pode equilibrar uma Força Tangencial  $\mapsto$  Escoamento

## Resposta às Tensões Tangenciais:

- Corpo Rígido  $\mapsto$  Deforma-se até atingir o Equilíbrio  $\mapsto$  Deformação Elástica
- Fluido  $\mapsto$  Não pode equilibrar uma Força Tangencial  $\mapsto$  Escoamento

## Resistência a Esforços Tangenciais:

## Resposta às Tensões Tangenciais:

- Corpo Rígido  $\mapsto$  Deforma-se até atingir o Equilíbrio  $\mapsto$  Deformação Elástica
- Fluido  $\mapsto$  Não pode equilibrar uma Força Tangencial  $\mapsto$  Escoamento

## Resistência a Esforços Tangenciais:

- Corpo Rígido  $\mapsto$  depende da deformação

## Resposta às Tensões Tangenciais:

- Corpo Rígido  $\mapsto$  Deforma-se até atingir o Equilíbrio  $\mapsto$  Deformação Elástica
- Fluido  $\mapsto$  Não pode equilibrar uma Força Tangencial  $\mapsto$  Escoamento

## Resistência a Esforços Tangenciais:

- Corpo Rígido  $\mapsto$  depende da deformação
- Fluido  $\mapsto$  depende da velocidade de deformação  $\mapsto$  Viscosidade

## Resposta às Tensões Tangenciais:

- Corpo Rígido  $\mapsto$  Deforma-se até atingir o Equilíbrio  $\mapsto$  Deformação Elástica
- Fluido  $\mapsto$  Não pode equilibrar uma Força Tangencial  $\mapsto$  Escoamento

## Resistência a Esforços Tangenciais:

- Corpo Rígido  $\mapsto$  depende da deformação
- Fluido  $\mapsto$  depende da velocidade de deformação  $\mapsto$  Viscosidade

Estática dos Fluidos  $\mapsto$  NÃO HÁ TENSÕES TANGENCIAIS!!!

# Pressão



# Pressão

Seja uma massa  $\Delta m$  de Fluido, de volume  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  em torno de um ponto P.

# Pressão

Seja uma massa  $\Delta m$  de Fluido, de volume  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  em torno de um ponto P.

Definimos como sendo a densidade  $\rho$  do fluido no ponto P como sendo:

# Pressão

Seja uma massa  $\Delta m$  de Fluido, de volume  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  em torno de um ponto P.

Definimos como sendo a densidade  $\rho$  do fluido no ponto P como sendo:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \quad (1)$$

# Pressão

Seja uma massa  $\Delta m$  de Fluido, de volume  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  em torno de um ponto P.

Definimos como sendo a densidade  $\rho$  do fluido no ponto P como sendo:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \quad (1)$$

Logo, a força sobre um elemento de volume  $\Delta V$  em torno do ponto P onde a densidade é  $\rho$  é:

# Pressão

Seja uma massa  $\Delta m$  de Fluido, de volume  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  em torno de um ponto P.

Definimos como sendo a densidade  $\rho$  do fluido no ponto P como sendo:

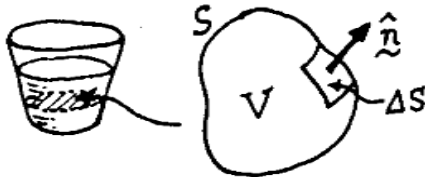
$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \quad (1)$$

Logo, a força sobre um elemento de volume  $\Delta V$  em torno do ponto P onde a densidade é  $\rho$  é:

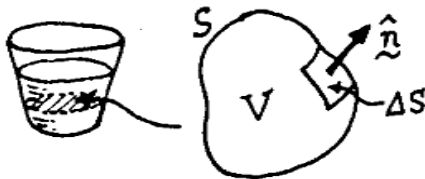
$$\Delta \vec{F} = \Delta m \vec{g} = \rho \vec{g} \Delta V \quad (2)$$

A força superficial sobre um elemento de superfície  $dS$  corresponde a uma pressão  $p$ :

A força superficial sobre um elemento de superfície  $dS$  corresponde a uma pressão  $p$ :



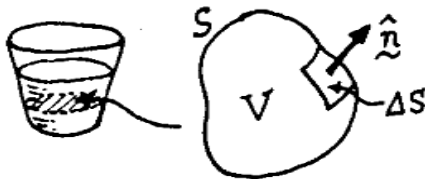
A força superficial sobre um elemento de superfície  $dS$  corresponde a uma pressão  $p$ :



$$d\vec{F} = -p * \hat{n} * dS \implies p = \left| \frac{d\vec{F}}{dS} \right| = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} \quad (3)$$



A força superficial sobre um elemento de superfície  $dS$  corresponde a uma pressão  $p$ :



$$d\vec{F} = -p * \hat{n} * dS \implies p = \left| \frac{d\vec{F}}{dS} \right| = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} \quad (3)$$

No Sistema Internacional de Unidades (S.I.), a unidade usual de pressão é o Pascal ( $Pa \equiv \frac{N}{m^2}$ )

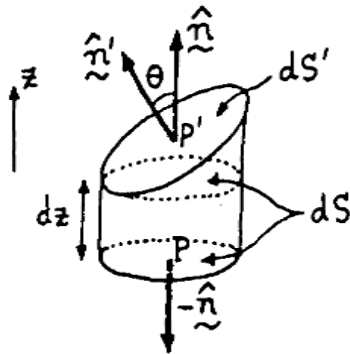
## Teorema

## Teorema

*A pressão num ponto de um fluido em equilíbrio é a mesma em todas as direções, ou seja,  $p$  não depende de  $\hat{n}$ .*

## Teorema

*A pressão num ponto de um fluido em equilíbrio é a mesma em todas as direções, ou seja,  $p$  não depende de  $\hat{n}$ .*



## Demonstração.

## Demonstração.

A condição de equilíbrio é que a resultante de todas as forças do cilindro se anule. De acordo com (3), a força na base superior contribui com:

## Demonstração.

A condição de equilíbrio é que a resultante de todas as forças do cilindro se anule. De acordo com (3), a força na base superior contribui com:

$$-p(P', \hat{n}') * dS' * \hat{n}' * \hat{k} = -p(P', \hat{n}') * dS' * \cos\theta \quad (4)$$

## Demonstração.

A condição de equilíbrio é que a resultante de todas as forças do cilindro se anule. De acordo com (3), a força na base superior contribui com:

$$-p(P', \hat{n}') * dS' * \hat{n}' * \hat{k} = -p(P', \hat{n}') * dS' * \cos\theta \quad (4)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\hat{n}$  e  $\hat{n}'$ .



## Demonstração.

A condição de equilíbrio é que a resultante de todas as forças do cilindro se anule. De acordo com (3), a força na base superior contribui com:

$$-p(P', \hat{n}') * dS' * \hat{n}' * \hat{k} = -p(P', \hat{n}') * dS' * \cos\theta \quad (4)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\hat{n}$  e  $\hat{n}'$ . Na base inferior, temos:

## Demonstração.

A condição de equilíbrio é que a resultante de todas as forças do cilindro se anule. De acordo com (3), a força na base superior contribui com:

$$-p(P', \hat{n}') * dS' * \hat{n}' * \hat{k} = -p(P', \hat{n}') * dS' * \cos\theta \quad (4)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\hat{n}$  e  $\hat{n}'$ . Na base inferior, temos:

$$-p(P, -\hat{n}) * dS * (-\hat{n}) * \hat{k} = p(P, \hat{n}) * dS \quad (5)$$

## Demonstração.

A condição de equilíbrio é que a resultante de todas as forças do cilindro se anule. De acordo com (3), a força na base superior contribui com:

$$-p(P', \hat{n}') * dS' * \hat{n}' * \hat{k} = -p(P', \hat{n}') * dS' * \cos\theta \quad (4)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\hat{n}$  e  $\hat{n}'$ . Na base inferior, temos:

$$-p(P, -\hat{n}) * dS * (-\hat{n}) * \hat{k} = p(P, \hat{n}) * dS \quad (5)$$

Como  $dS' \cos\theta = dS$ , a condição de equilíbrio fica:

## Demonstração.

A condição de equilíbrio é que a resultante de todas as forças do cilindro se anule. De acordo com (3), a força na base superior contribui com:

$$-p(P', \hat{n}') * dS' * \hat{n}' * \hat{k} = -p(P', \hat{n}') * dS' * \cos\theta \quad (4)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\hat{n}$  e  $\hat{n}'$ . Na base inferior, temos:

$$-p(P, -\hat{n}) * dS * (-\hat{n}) * \hat{k} = p(P, \hat{n}) * dS \quad (5)$$

Como  $dS' \cos\theta = dS$ , a condição de equilíbrio fica:

$$[p(P, \hat{n}) - p(P', \hat{n}')]dS = 0$$

## Demonstração.

A condição de equilíbrio é que a resultante de todas as forças do cilindro se anule. De acordo com (3), a força na base superior contribui com:

$$-p(P', \hat{n}') * dS' * \hat{n}' * \hat{k} = -p(P', \hat{n}') * dS' * \cos\theta \quad (4)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\hat{n}$  e  $\hat{n}'$ . Na base inferior, temos:

$$-p(P, -\hat{n}) * dS * (-\hat{n}) * \hat{k} = p(P, \hat{n}) * dS \quad (5)$$

Como  $dS' \cos\theta = dS$ , a condição de equilíbrio fica:

$$[p(P, \hat{n}) - p(P', \hat{n}')]dS = 0 \implies$$

## Demonstração.

A condição de equilíbrio é que a resultante de todas as forças do cilindro se anule. De acordo com (3), a força na base superior contribui com:

$$-p(P', \hat{n}') * dS' * \hat{n}' * \hat{k} = -p(P', \hat{n}') * dS' * \cos\theta \quad (4)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\hat{n}$  e  $\hat{n}'$ . Na base inferior, temos:

$$-p(P, -\hat{n}) * dS * (-\hat{n}) * \hat{k} = p(P, \hat{n}) * dS \quad (5)$$

Como  $dS' \cos\theta = dS$ , a condição de equilíbrio fica:

$$[p(P, \hat{n}) - p(P', \hat{n}')]dS = 0 \implies p(P, \hat{n}') = p(P, \hat{n}) \quad (6)$$

quaisquer que sejam  $\hat{n}$  e  $\hat{n}'$



# Viscosidade

# Viscosidade

Força de Viscosidade:



# Viscosidade

Força de Viscosidade:

$$F = \eta A \frac{dv}{dx} \quad (7)$$

# Viscosidade

Força de Viscosidade:

$$F = \eta A \frac{dv}{dx} \quad (7)$$

- $\eta \mapsto$  coeficiente de viscosidade dinâmica;

# Viscosidade

Força de Viscosidade:

$$F = \eta A \frac{dv}{dx} \quad (7)$$

- $\eta$   $\mapsto$  coeficiente de viscosidade dinâmica;
- $A$   $\mapsto$  área da placa que se move no fluido;

# Viscosidade

Força de Viscosidade:

$$F = \eta A \frac{dv}{dx} \quad (7)$$

- $\eta \mapsto$  coeficiente de viscosidade dinâmica;
- $A \mapsto$  área da placa que se move no fluido;
- $A \perp x \perp v$

# Viscosidade

Força de Viscosidade:

$$F = \eta A \frac{dv}{dx} \quad (7)$$

- $\eta \mapsto$  coeficiente de viscosidade dinâmica;
- $A \mapsto$  área da placa que se move no fluido;
- $A \perp x \perp v$

No S.I., a unidade usual de viscosidade  $\eta$  é pascal segundo ( $Pa \cdot s$ ).

# Viscosidade

Força de Viscosidade:

$$F = \eta A \frac{dv}{dx} \quad (7)$$

- $\eta \mapsto$  coeficiente de viscosidade dinâmica;
- $A \mapsto$  área da placa que se move no fluido;
- $A \perp x \perp v$

No S.I., a unidade usual de viscosidade  $\eta$  é pascal segundo ( $Pa \cdot s$ ).  
Outra unidade, mais usual, é o poise ( $P \rightarrow 1Pa \cdot s = 10P$ ).

- Turbulência:

- Turbulência:  
Componentes Transversais de escoamento



- Turbulência:  
Componentes Transversais de escoamento  $\mapsto$  Perda de Energia

- Turbulência:  
Componentes Transversais de Escoamento  $\mapsto$  Perda de Energia
- Natureza da Turbulência

- Turbulência:  
Componentes Transversais de Escoamento  $\mapsto$  Perda de Energia
- Natureza da Turbulência  $\mapsto$  Número de Reynolds ( $Re$ )  $\mapsto$

- Turbulência:  
Componentes Transversais de Escoamento  $\mapsto$  Perda de Energia
- Natureza da Turbulência  $\mapsto$  Número de Reynolds ( $Re$ )  $\mapsto$  Relação entre as Forças de Inércia e de Viscosidade do Fluido:

- Turbulência:  
Componentes Transversais de Escoamento  $\mapsto$  Perda de Energia
- Natureza da Turbulência  $\mapsto$  Número de Reynolds (Re)  $\mapsto$  Relação entre as Forças de Inércia e de Viscosidade do Fluido:

$$Re = \frac{\Sigma F_i}{\Sigma F_\eta} = \frac{\rho * u * d}{\eta} \quad (8)$$

- Turbulência:  
Componentes Transversais de Escoamento  $\mapsto$  Perda de Energia
- Natureza da Turbulência  $\mapsto$  Número de Reynolds (Re)  $\mapsto$  Relação entre as Forças de Inércia e de Viscosidade do Fluido:

$$Re = \frac{\Sigma F_i}{\Sigma F_\eta} = \frac{\rho * u * d}{\eta} \quad (8)$$

onde  $\rho$  é a densidade do fluido,  $u$  é a velocidade relativa de escoamento,  $d$  é o diâmetro transversal de escoamento e  $\eta$  é a viscosidade do fluido.

Introdução

**Propriedade dos Fluidos**

Fluido Incompressível num Campo Gravitacional

Variação da Pressão Atmosférica com a Altitude

Exercícios

Pressão

Viscosidade

**Tensão Superficial**

Equilíbrio num Campo de Forças

# Tensão Superficial

# Tensão Superficial

- Tensão Molecular Restauradora ao Peso do Corpo Tensionado



# Tensão Superficial

- Tensão Molecular Restauradora ao Peso do Corpo Tensionado
- Proporcional ao Comprimento da Superfície Rompida

# Tensão Superficial

- Tensão Molecular Restauradora ao Peso do Corpo Tensionado
- Proporcional ao Comprimento da Superfície Rompida  $\mapsto$   
Dobro do Comprimento do Corpo

# Tensão Superficial

- Tensão Molecular Restauradora ao Peso do Corpo Tensionado
- Proporcional ao Comprimento da Superfície Rompida  $\mapsto$   
Dobro do Comprimento do Corpo

$$\gamma = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{dF}{dl} \quad (9)$$

# Tensão Superficial

- Tensão Molecular Restauradora ao Peso do Corpo Tensionado
- Proporcional ao Comprimento da Superfície Rompida  $\mapsto$   
Dobro do Comprimento do Corpo

$$\gamma = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{dF}{dl} \quad (9)$$

onde  $\gamma$  é o coeficiente de tensão superficial e  $dl$  é o comprimento de arco infinitesimal sobre o qual atua a força  $dF$ .

# Tensão Superficial

- Tensão Molecular Restauradora ao Peso do Corpo Tensionado
- Proporcional ao Comprimento da Superfície Rompida  $\mapsto$   
Dobro do Comprimento do Corpo

$$\gamma = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{dF}{dl} \quad (9)$$

onde  $\gamma$  é o coeficiente de tensão superficial e  $dl$  é o comprimento de arco infinitesimal sobre o qual atua a força  $dF$ .

Logo, a força necessária para arrancar o corpo da superfície do fluido é:

# Tensão Superficial

- Tensão Molecular Restauradora ao Peso do Corpo Tensionado
- Proporcional ao Comprimento da Superfície Rompida  $\mapsto$   
Dobro do Comprimento do Corpo

$$\gamma = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{dF}{dl} \quad (9)$$

onde  $\gamma$  é o coeficiente de tensão superficial e  $dl$  é o comprimento de arco infinitesimal sobre o qual atua a força  $dF$ .

Logo, a força necessária para arrancar o corpo da superfície do fluido é:

$$F = 2\gamma l + mg \quad (10)$$

Introdução

**Propriedade dos Fluidos**

Fluido Incompressível num Campo Gravitacional

Variação da Pressão Atmosférica com a Altitude

Exercícios

Pressão

Viscosidade

Tensão Superficial

**Equilíbrio num Campo de Forças**

# Equilíbrio num Campo de Forças

# Equilíbrio num Campo de Forças

Densidade Volumétrica de Força:



# Equilíbrio num Campo de Forças

Densidade Volumétrica de Força:

$$\vec{f} = \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta \vec{V}} = -\rho g \hat{k} \quad (11)$$

## Equilíbrio num Campo de Forças

Densidade Volumétrica de Força:

$$\vec{f} = \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta \vec{V}} = -\rho g \hat{k} \quad (11)$$

A força volumétrica atuante na direção  $z$  axial ao cilindro é dada por:

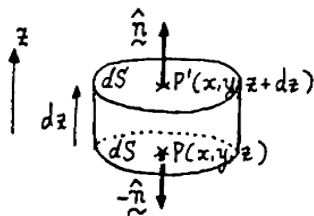
# Equilíbrio num Campo de Forças

Densidade Volumétrica de Força:

$$\vec{f} = \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta \vec{V}} = -\rho g \hat{k} \quad (11)$$

A força volumétrica atuante na direção  $z$  axial ao cilindro é dada por:

$$f_z dS dz \quad (12)$$



Logo, por (6), temos que a contribuição das forças superficiais é:

Logo, por (6), temos que a contribuição das forças superficiais é:

$$[-p(x, y, z + dz) + p(x, y, z)]dS \quad (13)$$

Logo, por (6), temos que a contribuição das forças superficiais é:

$$[-p(x, y, z + dz) + p(x, y, z)]dS \quad (13)$$

Tomando o limite:

Logo, por (6), temos que a contribuição das forças superficiais é:

$$[-p(x, y, z + dz) + p(x, y, z)]dS \quad (13)$$

Tomando o limite:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta z} = \frac{dp}{dz} = \frac{1}{dz} [-p(x, y, z + dz) + p(x, y, z)] \quad (14)$$

Logo, por (6), temos que a contribuição das forças superficiais é:

$$[-p(x, y, z + dz) + p(x, y, z)]dS \quad (13)$$

Tomando o limite:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta z} = \frac{dp}{dz} = \frac{1}{dz} [-p(x, y, z + dz) + p(x, y, z)] \quad (14)$$

Então:

$$p(x, y, z + dz) - p(x, y, z) = \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (15)$$



Logo, por (6), temos que a contribuição das forças superficiais é:

$$[-p(x, y, z + dz) + p(x, y, z)]dS \quad (13)$$

Tomando o limite:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta z} = \frac{dp}{dz} = \frac{1}{dz} [-p(x, y, z + dz) + p(x, y, z)] \quad (14)$$

Então:

$$p(x, y, z + dz) - p(x, y, z) = \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (15)$$

Somando (12) com (13), temos a condição de equilíbrio:

Logo, por (6), temos que a contribuição das forças superficiais é:

$$[-p(x, y, z + dz) + p(x, y, z)]dS \quad (13)$$

Tomando o limite:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta z} = \frac{dp}{dz} = \frac{1}{dz} [-p(x, y, z + dz) + p(x, y, z)] \quad (14)$$

Então:

$$p(x, y, z + dz) - p(x, y, z) = \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (15)$$

Somando (12) com (13), temos a condição de equilíbrio:

$$(f_z - \frac{\partial p}{\partial z})dSdz = 0$$

Logo, por (6), temos que a contribuição das forças superficiais é:

$$[-p(x, y, z + dz) + p(x, y, z)]dS \quad (13)$$

Tomando o limite:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta z} = \frac{dp}{dz} = \frac{1}{dz} [-p(x, y, z + dz) + p(x, y, z)] \quad (14)$$

Então:

$$p(x, y, z + dz) - p(x, y, z) = \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (15)$$

Somando (12) com (13), temos a condição de equilíbrio:

$$(f_z - \frac{\partial p}{\partial z})dSdz = 0 \implies$$

Logo, por (6), temos que a contribuição das forças superficiais é:

$$[-p(x, y, z + dz) + p(x, y, z)]dS \quad (13)$$

Tomando o limite:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta z} = \frac{dp}{dz} = \frac{1}{dz} [-p(x, y, z + dz) + p(x, y, z)] \quad (14)$$

Então:

$$p(x, y, z + dz) - p(x, y, z) = \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (15)$$

Somando (12) com (13), temos a condição de equilíbrio:

$$(f_z - \frac{\partial p}{\partial z})dSdz = 0 \implies f_z = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (16)$$

Obtemos, portanto:

Obtemos, portanto:

$$\vec{f} = f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k} = \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k} = \vec{\nabla} p \quad (17)$$

Obtemos, portanto:

$$\vec{f} = f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k} = \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k} = \vec{\nabla} p \quad (17)$$

Comparando (11) com (17), obtém-se:

Obtemos, portanto:

$$\vec{f} = f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k} = \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k} = \vec{\nabla} p \quad (17)$$

Comparando (11) com (17), obtém-se:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (18)$$



Obtemos, portanto:

$$\vec{f} = f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k} = \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k} = \vec{\nabla} p \quad (17)$$

Comparando (11) com (17), obtém-se:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (18)$$

ou seja, a pressão num fluido decresce com a altitude e cresce com a profundidade.

Introdução

Propriedade dos Fluidos

Fluido Incompressível num Campo Gravitacional

Variação da Pressão Atmosférica com a Altitude

Exercícios

Lei de Stevin

Líquido em Rotação

Aplicações

Princípio de Arquimedes

# Lei de Stevin

# Lei de Stevin

Tomando a expressão (18), temos:

# Lei de Stevin

Tomando a expressão (18), temos:

$$\int_{p(z_1)}^{p(z_2)} dp = -\rho g \int_{z_1}^{z_2} dz$$

# Lei de Stevin

Tomando a expressão (18), temos:

$$\int_{p(z_1)}^{p(z_2)} dp = -\rho g \int_{z_1}^{z_2} dz \implies$$

# Lei de Stevin

Tomando a expressão (18), temos:

$$\int_{p(z_1)}^{p(z_2)} dp = -\rho g \int_{z_1}^{z_2} dz \implies p(z_2) - p(z_1) = -\rho g(z_2 - z_1) \quad (19)$$

## Lei de Stevin

Tomando a expressão (18), temos:

$$\int_{p(z_1)}^{p(z_2)} dp = -\rho g \int_{z_1}^{z_2} dz \implies p(z_2) - p(z_1) = -\rho g(z_2 - z_1) \quad (19)$$

Se  $z_1$  corresponde à superfície livre do líquido, então  $z_1 - z_2 = h$  é a profundidade abaixo da superfície livre, e  $p(z_1)$  é a pressão atmosférica  $p_0$ . Portanto, a equação (19) fica:

# Lei de Stevin

Tomando a expressão (18), temos:

$$\int_{p(z_1)}^{p(z_2)} dp = -\rho g \int_{z_1}^{z_2} dz \implies p(z_2) - p(z_1) = -\rho g(z_2 - z_1) \quad (19)$$

Se  $z_1$  corresponde à superfície livre do líquido, então  $z_1 - z_2 = h$  é a profundidade abaixo da superfície livre, e  $p(z_1)$  é a pressão atmosférica  $p_0$ . Portanto, a equação (19) fica:

$$p = p_0 + \rho gh \quad (20)$$



## Lei de Stevin

Tomando a expressão (18), temos:

$$\int_{p(z_1)}^{p(z_2)} dp = -\rho g \int_{z_1}^{z_2} dz \implies p(z_2) - p(z_1) = -\rho g(z_2 - z_1) \quad (19)$$

Se  $z_1$  corresponde à superfície livre do líquido, então  $z_1 - z_2 = h$  é a profundidade abaixo da superfície livre, e  $p(z_1)$  é a pressão atmosférica  $p_0$ . Portanto, a equação (19) fica:

$$p = p_0 + \rho gh \quad (20)$$

A equação (20) é dita *Lei de Stevin: a pressão no interior do fluido aumenta linearmente com a profundidade.*

Introdução

Propriedade dos Fluidos

Fluido Incompressível num Campo Gravitacional

Variação da Pressão Atmosférica com a Altitude

Exercícios

Lei de Stevin

Líquido em Rotação

Aplicações

Princípio de Arquimedes

# Líquido em Rotação

# Líquido em Rotação

Força Centrífuga:

# Líquido em Rotação

Força Centrífuga:

$$\Delta \vec{F}_c = \Delta m \omega^2 r \hat{r}$$

# Líquido em Rotação

Força Centrífuga:

$$\Delta \vec{F}_c = \Delta m \omega^2 r \hat{r} \implies$$

# Líquido em Rotação

Força Centrífuga:

$$\Delta \vec{F}_c = \Delta m \omega^2 r \hat{r} \implies \vec{f}_c = \frac{\Delta \vec{F}_c}{\Delta V} = \frac{\Delta m}{\Delta V} \omega^2 r \hat{r} = \rho \omega^2 r \hat{r} \quad (21)$$

## Líquido em Rotação

Força Centrífuga:

$$\Delta \vec{F}_c = \Delta m \omega^2 r \hat{r} \implies \vec{f}_c = \frac{\Delta \vec{F}_c}{\Delta V} = \frac{\Delta m}{\Delta V} \omega^2 r \hat{r} = \rho \omega^2 r \hat{r} \quad (21)$$

de forma que a densidade total de forças é a soma de (11) com (21):

## Líquido em Rotação

Força Centrífuga:

$$\Delta \vec{F}_c = \Delta m \omega^2 r \hat{r} \implies \vec{f}_c = \frac{\Delta \vec{F}_c}{\Delta V} = \frac{\Delta m}{\Delta V} \omega^2 r \hat{r} = \rho \omega^2 r \hat{r} \quad (21)$$

de forma que a densidade total de forças é a soma de (11) com (21):

$$\vec{f}_T = \vec{f}_c + \vec{f} = \rho \omega^2 r \hat{r} - \rho g \hat{k} \quad (22)$$



## Líquido em Rotação

Força Centrífuga:

$$\Delta \vec{F}_c = \Delta m \omega^2 r \hat{r} \implies \vec{f}_c = \frac{\Delta \vec{F}_c}{\Delta V} = \frac{\Delta m}{\Delta V} \omega^2 r \hat{r} = \rho \omega^2 r \hat{r} \quad (21)$$

de forma que a densidade total de forças é a soma de (11) com (21):

$$\vec{f}_T = \vec{f}_c + \vec{f} = \rho \omega^2 r \hat{r} - \rho g \hat{k} \quad (22)$$

Comparando (17) com (22), obtemos:

# Líquido em Rotação

Força Centrífuga:

$$\Delta \vec{F}_c = \Delta m \omega^2 r \hat{r} \implies \vec{f}_c = \frac{\Delta \vec{F}_c}{\Delta V} = \frac{\Delta m}{\Delta V} \omega^2 r \hat{r} = \rho \omega^2 r \hat{r} \quad (21)$$

de forma que a densidade total de forças é a soma de (11) com (21):

$$\vec{f}_T = \vec{f}_c + \vec{f} = \rho \omega^2 r \hat{r} - \rho g \hat{k} \quad (22)$$

Comparando (17) com (22), obtemos:

$$\int_{p_0}^p dp' = \int_0^r \rho \omega^2 r' dr' - \int_0^z \rho g dz'$$

## Líquido em Rotação

Força Centrífuga:

$$\Delta \vec{F}_c = \Delta m \omega^2 r \hat{r} \implies \vec{f}_c = \frac{\Delta \vec{F}_c}{\Delta V} = \frac{\Delta m}{\Delta V} \omega^2 r \hat{r} = \rho \omega^2 r \hat{r} \quad (21)$$

de forma que a densidade total de forças é a soma de (11) com (21):

$$\vec{f}_T = \vec{f}_c + \vec{f} = \rho \omega^2 r \hat{r} - \rho g \hat{k} \quad (22)$$

Comparando (17) com (22), obtemos:

$$\int_{p_0}^p dp' = \int_0^r \rho \omega^2 r' dr' - \int_0^z \rho g dz' \implies$$

# Líquido em Rotação

Força Centrífuga:

$$\Delta \vec{F}_c = \Delta m \omega^2 r \hat{r} \implies \vec{f}_c = \frac{\Delta \vec{F}_c}{\Delta V} = \frac{\Delta m}{\Delta V} \omega^2 r \hat{r} = \rho \omega^2 r \hat{r} \quad (21)$$

de forma que a densidade total de forças é a soma de (11) com (21):

$$\vec{f}_T = \vec{f}_c + \vec{f} = \rho \omega^2 r \hat{r} - \rho g \hat{k} \quad (22)$$

Comparando (17) com (22), obtemos:

$$\int_{p_0}^p dp' = \int_0^r \rho \omega^2 r' dr' - \int_0^z \rho g dz' \implies p = p_0 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z \quad (23)$$

## Líquido em Rotação

Força Centrífuga:

$$\Delta \vec{F}_c = \Delta m \omega^2 r \hat{r} \implies \vec{f}_c = \frac{\Delta \vec{F}_c}{\Delta V} = \frac{\Delta m}{\Delta V} \omega^2 r \hat{r} = \rho \omega^2 r \hat{r} \quad (21)$$

de forma que a densidade total de forças é a soma de (11) com (21):

$$\vec{f}_T = \vec{f}_c + \vec{f} = \rho \omega^2 r \hat{r} - \rho g \hat{k} \quad (22)$$

Comparando (17) com (22), obtemos:

$$\int_{p_0}^p dp' = \int_0^r \rho \omega^2 r' dr' - \int_0^z \rho g dz' \implies p = p_0 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z \quad (23)$$

Fazendo  $p = p_0$ , encontramos a equação da superfície:

## Líquido em Rotação

Força Centrífuga:

$$\Delta \vec{F}_c = \Delta m \omega^2 r \hat{r} \implies \vec{f}_c = \frac{\Delta \vec{F}_c}{\Delta V} = \frac{\Delta m}{\Delta V} \omega^2 r \hat{r} = \rho \omega^2 r \hat{r} \quad (21)$$

de forma que a densidade total de forças é a soma de (11) com (21):

$$\vec{f}_T = \vec{f}_c + \vec{f} = \rho \omega^2 r \hat{r} - \rho g \hat{k} \quad (22)$$

Comparando (17) com (22), obtemos:

$$\int_{p_0}^p dp' = \int_0^r \rho \omega^2 r' dr' - \int_0^z \rho g dz' \implies p = p_0 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z \quad (23)$$

Fazendo  $p = p_0$ , encontramos a equação da superfície:

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \text{ (Parabolóide de Revolução)} \quad (24)$$

Introdução

Propriedade dos Fluidos

Fluido Incompressível num Campo Gravitacional

Variação da Pressão Atmosférica com a Altitude

Exercícios

Lei de Stevin

Líquido em Rotação

**Aplicações**

Princípio de Arquimedes

# Aplicações

# Aplicações

Pela Lei de Stevin, se produzirmos uma variação de pressão num ponto de um líquido em equilíbrio, essa variação se transmite a todo o líquido;



# Aplicações

Pela Lei de Stevin, se produzirmos uma variação de pressão num ponto de um líquido em equilíbrio, essa variação se transmite a todo o líquido;

Este princípio foi enunciado por Pascal em 1663, aplicando-o à *Prensa Hidráulica*:

## Aplicações

Pela Lei de Stevin, se produzirmos uma variação de pressão num ponto de um líquido em equilíbrio, essa variação se transmite a todo o líquido;

Este princípio foi enunciado por Pascal em 1663, aplicando-o à *Prensa Hidráulica*:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad (25)$$

# Aplicações

Pela Lei de Stevin, se produzirmos uma variação de pressão num ponto de um líquido em equilíbrio, essa variação se transmite a todo o líquido;

Este princípio foi enunciado por Pascal em 1663, aplicando-o à *Prensa Hidráulica*:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad (25)$$

Pelo Teorema 1, a pressão no fluido também tem o mesmo valor em quaisquer pontos de diferentes ramos que se comunicam entre si, ditos *Vasos Comunicantes*, Logo:

# Aplicações

Pela Lei de Stevin, se produzirmos uma variação de pressão num ponto de um líquido em equilíbrio, essa variação se transmite a todo o líquido;

Este princípio foi enunciado por Pascal em 1663, aplicando-o à *Prensa Hidráulica*:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad (25)$$

Pelo Teorema 1, a pressão no fluido também tem o mesmo valor em quaisquer pontos de diferentes ramos que se comunicam entre si, ditos *Vasos Comunicantes*, Logo:

$$p = p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2$$

# Aplicações

Pela Lei de Stevin, se produzirmos uma variação de pressão num ponto de um líquido em equilíbrio, essa variação se transmite a todo o líquido;

Este princípio foi enunciado por Pascal em 1663, aplicando-o à *Prensa Hidráulica*:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad (25)$$

Pelo Teorema 1, a pressão no fluido também tem o mesmo valor em quaisquer pontos de diferentes ramos que se comunicam entre si, ditos *Vasos Comunicantes*, Logo:

$$p = p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2 \implies$$

# Aplicações

Pela Lei de Stevin, se produzirmos uma variação de pressão num ponto de um líquido em equilíbrio, essa variação se transmite a todo o líquido;

Este princípio foi enunciado por Pascal em 1663, aplicando-o à *Prensa Hidráulica*:

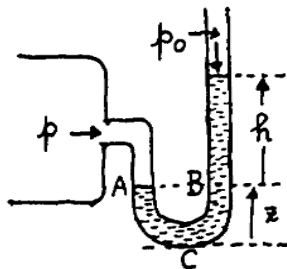
$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad (25)$$

Pelo Teorema 1, a pressão no fluido também tem o mesmo valor em quaisquer pontos de diferentes ramos que se comunicam entre si, ditos *Vasos Comunicantes*, Logo:

$$p = p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2 \implies \frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (26)$$

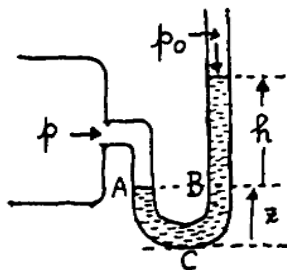
## Manômetro de Tubo Aberto:

## Manômetro de Tubo Aberto:



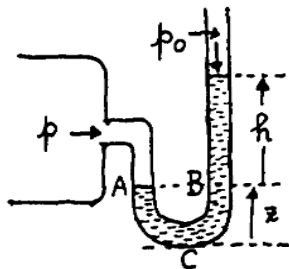


## Manômetro de Tubo Aberto:



Por (20), sendo  $\rho$  a densidade do líquido, a pressão num ponto C do fundo do tubo se escreve como sendo:

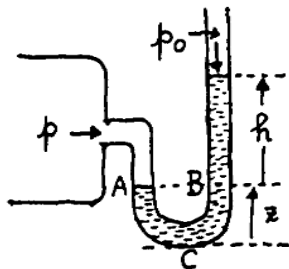
## Manômetro de Tubo Aberto:



Por (20), sendo  $\rho$  a densidade do líquido, a pressão num ponto C do fundo do tubo se escreve como sendo:

$$p_C = p + \rho g z = p_0 + \rho g(z + h)$$

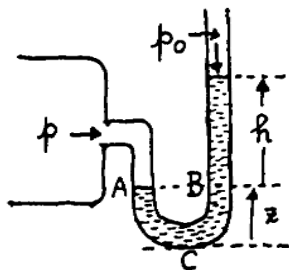
## Manômetro de Tubo Aberto:



Por (20), sendo  $\rho$  a densidade do líquido, a pressão num ponto C do fundo do tubo se escreve como sendo:

$$p_C = p + \rho g z = p_0 + \rho g(z + h) \implies$$

## Manômetro de Tubo Aberto:



Por (20), sendo  $\rho$  a densidade do líquido, a pressão num ponto C do fundo do tubo se escreve como sendo:

$$p_C = p + \rho g z = p_0 + \rho g(z + h) \implies p - p_0 = \rho g h \quad (27)$$

a pressão  $p_m = p - p_0$  é dita *pressão manométrica*.

Introdução

Propriedade dos Fluidos

Fluido Incompressível num Campo Gravitacional

Variação da Pressão Atmosférica com a Altitude

Exercícios

Lei de Stevin

Líquido em Rotação

Aplicações

Princípio de Arquimedes

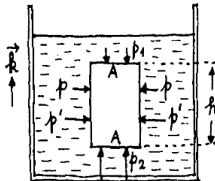
# Princípio de Arquimedes

# Princípio de Arquimedes

Na ilustração, vemos que as forças sobre a superfície lateral do cilindro se equilibram duas a duas.

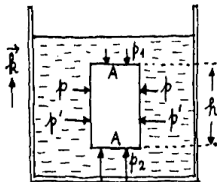
# Princípio de Arquimedes

Na ilustração, vemos que as forças sobre a superfície lateral do cilindro se equilibram duas a duas.



# Princípio de Arquimedes

Na ilustração, vemos que as forças sobre a superfície lateral do cilindro se equilibram duas a duas.

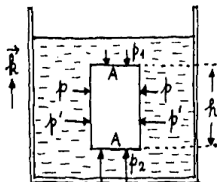


Entretanto, temos que  $p_2 > p_1$ . Pela equação (20), temos que:



# Princípio de Arquimedes

Na ilustração, vemos que as forças sobre a superfície lateral do cilindro se equilibram duas a duas.

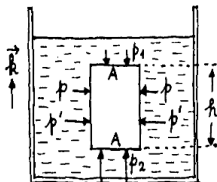


Entretanto, temos que  $p_2 > p_1$ . Pela equação (20), temos que:

$$p_2 - p_1 = \rho gh$$

# Princípio de Arquimedes

Na ilustração, vemos que as forças sobre a superfície lateral do cilindro se equilibram duas a duas.

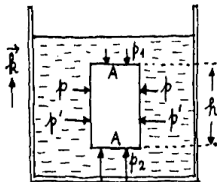


Entretanto, temos que  $p_2 > p_1$ . Pela equação (20), temos que:

$$p_2 - p_1 = \rho gh \implies$$

# Princípio de Arquimedes

Na ilustração, vemos que as forças sobre a superfície lateral do cilindro se equilibram duas a duas.

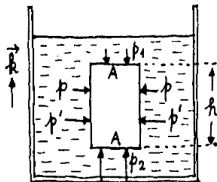


Entretanto, temos que  $p_2 > p_1$ . Pela equação (20), temos que:

$$p_2 - p_1 = \rho gh \implies p_2 A - p_1 A = \rho gh A = \rho V g \quad (28)$$

# Princípio de Arquimedes

Na ilustração, vemos que as forças sobre a superfície lateral do cilindro se equilibram duas a duas.



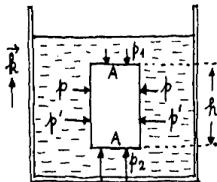
Entretanto, temos que  $p_2 > p_1$ . Pela equação (20), temos que:

$$p_2 - p_1 = \rho gh \implies p_2 A - p_1 A = \rho gh A = \rho V g \quad (28)$$

Desta forma, definimos a resultante de forças superficiais exercidas pelo fluido sobre o cilindro, dito *empuxo*:

# Princípio de Arquimedes

Na ilustração, vemos que as forças sobre a superfície lateral do cilindro se equilibram duas a duas.



Entretanto, temos que  $p_2 > p_1$ . Pela equação (20), temos que:

$$p_2 - p_1 = \rho gh \implies p_2 A - p_1 A = \rho gh A = \rho Vg \quad (28)$$

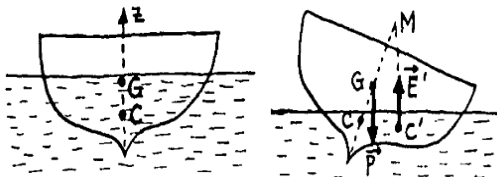
Desta forma, definimos a resultante de forças superficiais exercidas pelo fluido sobre o cilindro, dito *empuxo*:

$$\vec{E} = \rho Vg \hat{k} \quad (29)$$

## Equilíbrio dos Corpos Flutuantes:

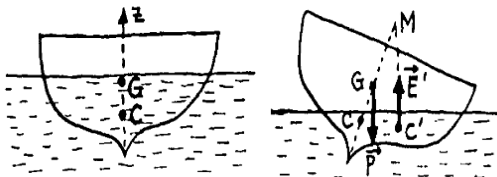
**Equilíbrio dos Corpos Flutuantes:** Na posição de equilíbrio, o torque resultante deve ser nulo, o que exige que o centro de empuxo  $C$  e o centro de gravidade  $G$  estejam sobre a mesma vertical.

**Equilíbrio dos Corpos Flutuantes:** Na posição de equilíbrio, o torque resultante deve ser nulo, o que exige que o centro de empuxo  $C$  e o centro de gravidade  $G$  estejam sobre a mesma vertical.



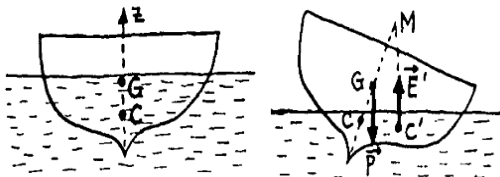


**Equilíbrio dos Corpos Flutuantes:** Na posição de equilíbrio, o torque resultante deve ser nulo, o que exige que o centro de empuxo  $C$  e o centro de gravidade  $G$  estejam sobre a mesma vertical.



Entretanto, isso não garante a estabilidade do equilíbrio. quando o corpo gira, a porção de fluido deslocada muda de forma, gerando um novo centro de empuxo  $C'$ .

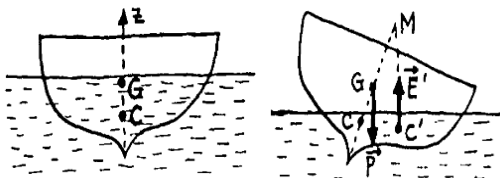
**Equilíbrio dos Corpos Flutuantes:** Na posição de equilíbrio, o torque resultante deve ser nulo, o que exige que o centro de empuxo  $C$  e o centro de gravidade  $G$  estejam sobre a mesma vertical.



Entretanto, isso não garante a estabilidade do equilíbrio. quando o corpo gira, a porção de fluido deslocada muda de forma, gerando um novo centro de empuxo  $C'$ .

$M$  ACIMA DE  $G \implies$  EQUILÍBRIO ESTÁVEL

**Equilíbrio dos Corpos Flutuantes:** Na posição de equilíbrio, o torque resultante deve ser nulo, o que exige que o centro de empuxo  $C$  e o centro de gravidade  $G$  estejam sobre a mesma vertical.



Entretanto, isso não garante a estabilidade do equilíbrio. quando o corpo gira, a porção de fluido deslocada muda de forma, gerando um novo centro de empuxo  $C'$ .

$M$  ACIMA DE  $G \implies$  EQUILÍBRIO ESTÁVEL

$M$  ABAIXO DE  $G \implies$  EQUILÍBRIO INSTÁVEL

# Lei de Halley

# Lei de Halley

Para um fluido incompressível, a densidade  $\rho$  definida em (1) é constante;

# Lei de Halley

Para um fluido incompressível, a densidade  $\rho$  definida em (1) é constante; para um gás, entretanto, é preciso levar em conta que  $\rho$  varia com a pressão:

# Lei de Halley

Para um fluido incompressível, a densidade  $\rho$  definida em (1) é constante; para um gás, entretanto, é preciso levar em conta que  $\rho$  varia com a pressão:

$$\frac{\rho(z)}{\rho_0} = \frac{p(z)}{p_0} \quad (30)$$

## Lei de Halley

Para um fluido incompressível, a densidade  $\rho$  definida em (1) é constante; para um gás, entretanto, é preciso levar em conta que  $\rho$  varia com a pressão:

$$\frac{\rho(z)}{\rho_0} = \frac{p(z)}{p_0} \quad (30)$$

Logo, a equação (18) fica:



# Lei de Halley

Para um fluido incompressível, a densidade  $\rho$  definida em (1) é constante; para um gás, entretanto, é preciso levar em conta que  $\rho$  varia com a pressão:

$$\frac{\rho(z)}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} \quad (30)$$

Logo, a equação (18) fica:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = -\frac{p}{p_0} \rho_0$$

# Lei de Halley

Para um fluido incompressível, a densidade  $\rho$  definida em (1) é constante; para um gás, entretanto, é preciso levar em conta que  $\rho$  varia com a pressão:

$$\frac{\rho(z)}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} \quad (30)$$

Logo, a equação (18) fica:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = -\frac{p}{p_0} \rho_0 \implies$$

## Lei de Halley

Para um fluido incompressível, a densidade  $\rho$  definida em (1) é constante; para um gás, entretanto, é preciso levar em conta que  $\rho$  varia com a pressão:

$$\frac{\rho(z)}{\rho_0} = \frac{p(z)}{p_0} \quad (30)$$

Logo, a equação (18) fica:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = -\frac{p}{p_0} \rho_0 \implies \int_{p_0}^p \frac{dp'}{p'} = -\frac{\rho_0}{p_0} g \int_0^z dz' \quad (31)$$

## Lei de Halley

Para um fluido incompressível, a densidade  $\rho$  definida em (1) é constante; para um gás, entretanto, é preciso levar em conta que  $\rho$  varia com a pressão:

$$\frac{\rho(z)}{\rho_0} = \frac{p(z)}{p_0} \quad (30)$$

Logo, a equação (18) fica:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = -\frac{p}{p_0} \rho_0 \implies \int_{p_0}^p \frac{dp'}{p'} = -\frac{\rho_0}{p_0} g \int_0^z dz' \quad (31)$$

Integrando, obtemos a *Lei de Halley*

## Lei de Halley

Para um fluido incompressível, a densidade  $\rho$  definida em (1) é constante; para um gás, entretanto, é preciso levar em conta que  $\rho$  varia com a pressão:

$$\frac{\rho(z)}{\rho_0} = \frac{p(z)}{p_0} \quad (30)$$

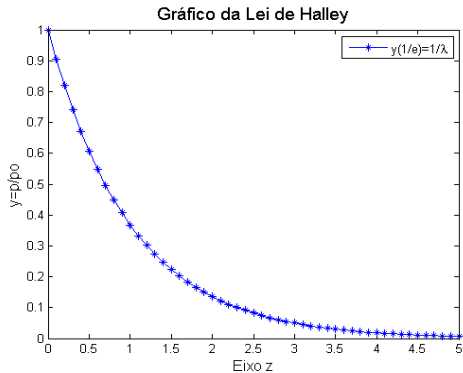
Logo, a equação (18) fica:

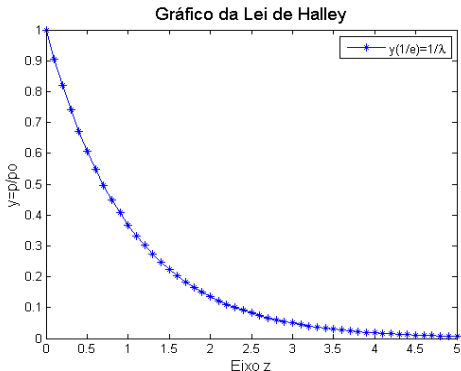
$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = -\frac{p}{p_0} \rho_0 \implies \int_{p_0}^p \frac{dp'}{p'} = -\frac{\rho_0}{p_0} g \int_0^z dz' \quad (31)$$

Integrando, obtemos a *Lei de Halley*

$$p(z) = p_0 e^{-\lambda z}; \quad \lambda = \frac{\rho_0 g}{p_0} \quad (32)$$

ou seja, a pressão decresce exponencialmente com a altitude.





Para o ar à temperatura de  $15^{\circ}\text{C}$ , a densidade ao nível do mar e à pressão de  $1\text{ atm} = 1,013 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$  é  $\rho_0 \approx 1,226 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ , o que daria  $\frac{1}{\lambda} \approx 8,4\text{ km}$  (ordem de grandeza da Troposfera).

# Exercício 1

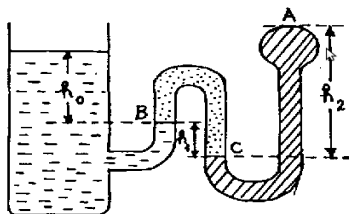


# Exercício 1

No sistema da figura, a porção AC contém mercúrio, BC contém óleo e o tanque aberto contém água.

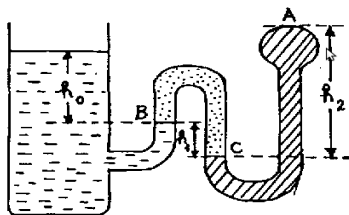
# Exercício 1

No sistema da figura, a porção AC contém mercúrio, BC contém óleo e o tanque aberto contém água.



# Exercício 1

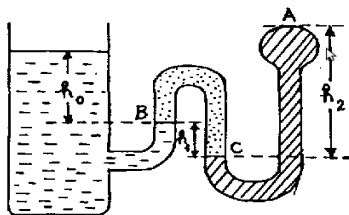
No sistema da figura, a porção AC contém mercúrio, BC contém óleo e o tanque aberto contém água.



Sejam as alturas indicadas e as densidades relativas à da água:

# Exercício 1

No sistema da figura, a porção AC contém mercúrio, BC contém óleo e o tanque aberto contém água.



Sejam as alturas indicadas e as densidades relativas à da água:

$$h_0 = 10\text{cm}; h_1 = 5\text{cm}; h_2 = 20\text{cm}$$

$$\rho_{Hg} = 13,6; \rho_{oleo} = 0,8$$

Para determinar a pressão no ponto A, primeiramente descrevemos a Lei de Stevin no ponto B:

Para determinar a pressão no ponto A, primeiramente descrevemos a Lei de Stevin no ponto B:

$$p_B = p_0 + \rho_{H_2O} * g * h_0 \quad (33)$$

Para determinar a pressão no ponto A, primeiramente descrevemos a Lei de Stevin no ponto B:

$$p_B = p_0 + \rho_{H_2O} * g * h_0 \quad (33)$$

Logo, por (33), a Lei de Stevin no ponto C em relação a B é:

Para determinar a pressão no ponto A, primeiramente descrevemos a Lei de Stevin no ponto B:

$$p_B = p_0 + \rho_{H_2O} * g * h_0 \quad (33)$$

Logo, por (33), a Lei de Stevin no ponto C em relação a B é:

$$p_C = p_B + \rho_{oleo} * g * h_1$$



Para determinar a pressão no ponto A, primeiramente descrevemos a Lei de Stevin no ponto B:

$$p_B = p_0 + \rho_{H_2O} * g * h_0 \quad (33)$$

Logo, por (33), a Lei de Stevin no ponto C em relação a B é:

$$p_C = p_B + \rho_{oleo} * g * h_1 = p_0 + \rho_{H_2O} * g * h_0 + 0,8 * \rho_{H_2O} * g * h_1 \quad (34)$$

Para determinar a pressão no ponto A, primeiramente descrevemos a Lei de Stevin no ponto B:

$$p_B = p_0 + \rho_{H_2O} * g * h_0 \quad (33)$$

Logo, por (33), a Lei de Stevin no ponto C em relação a B é:

$$p_C = p_B + \rho_{oleo} * g * h_1 = p_0 + \rho_{H_2O} * g * h_0 + 0,8 * \rho_{H_2O} * g * h_1 \quad (34)$$

E em relação a A:

Para determinar a pressão no ponto A, primeiramente descrevemos a Lei de Stevin no ponto B:

$$p_B = p_0 + \rho_{H_2O} * g * h_0 \quad (33)$$

Logo, por (33), a Lei de Stevin no ponto C em relação a B é:

$$p_C = p_B + \rho_{oleo} * g * h_1 = p_0 + \rho_{H_2O} * g * h_0 + 0,8 * \rho_{H_2O} * g * h_1 \quad (34)$$

E em relação a A:

$$p_C = p_A + \rho_{Hg} * g * h_2$$

Para determinar a pressão no ponto A, primeiramente descrevemos a Lei de Stevin no ponto B:

$$p_B = p_0 + \rho_{H_2O} * g * h_0 \quad (33)$$

Logo, por (33), a Lei de Stevin no ponto C em relação a B é:

$$p_C = p_B + \rho_{oleo} * g * h_1 = p_0 + \rho_{H_2O} * g * h_0 + 0,8 * \rho_{H_2O} * g * h_1 \quad (34)$$

E em relação a A:

$$p_C = p_A + \rho_{Hg} * g * h_2 = p_A + 13,6 * \rho_{H_2O} * g * h_2 \quad (35)$$

Comparando (34) com (35), temos:

Comparando (34) com (35), temos:

$$p_A = p_0 + \rho_{H_2O} * g * h_0 + 0,8 * \rho_{H_2O} * g * h_1 - 13,6 * \rho_{H_2O} * g * h_2 \quad (36)$$

Comparando (34) com (35), temos:

$$p_A = p_0 + \rho_{H_2O} * g * h_0 + 0,8 * \rho_{H_2O} * g * h_1 - 13,6 * \rho_{H_2O} * g * h_2 \quad (36)$$

Substituindo os valores:

Comparando (34) com (35), temos:

$$p_A = p_0 + \rho_{H_2O} * g * h_0 + 0,8 * \rho_{H_2O} * g * h_1 - 13,6 * \rho_{H_2O} * g * h_2 \quad (36)$$

Substituindo os valores:

$$= 1,013 * 10^5 Pa + 10^3 \frac{kg}{m^3} * 9,8 \frac{m}{s^2} * 0,1m + 0,8 * 10^3 \frac{kg}{m^3} * 9,8 \frac{m}{s^2} * 0,05m -$$

$$- 13,6 * 10^3 \frac{kg}{m^3} * 9,8 \frac{m}{s^2} * 0,2m$$



Comparando (34) com (35), temos:

$$p_A = p_0 + \rho_{H_2O} * g * h_0 + 0,8 * \rho_{H_2O} * g * h_1 - 13,6 * \rho_{H_2O} * g * h_2 \quad (36)$$

Substituindo os valores:

$$= 1,013 * 10^5 Pa + 10^3 \frac{kg}{m^3} * 9,8 \frac{m}{s^2} * 0,1m + 0,8 * 10^3 \frac{kg}{m^3} * 9,8 \frac{m}{s^2} * 0,05m - \\ - 13,6 * 10^3 \frac{kg}{m^3} * 9,8 \frac{m}{s^2} * 0,2m$$

Encontramos, por fim:

Comparando (34) com (35), temos:

$$p_A = p_0 + \rho_{H_2O} * g * h_0 + 0,8 * \rho_{H_2O} * g * h_1 - 13,6 * \rho_{H_2O} * g * h_2 \quad (36)$$

Substituindo os valores:

$$= 1,013 * 10^5 Pa + 10^3 \frac{kg}{m^3} * 9,8 \frac{m}{s^2} * 0,1m + 0,8 * 10^3 \frac{kg}{m^3} * 9,8 \frac{m}{s^2} * 0,05m - \\ - 13,6 * 10^3 \frac{kg}{m^3} * 9,8 \frac{m}{s^2} * 0,2m$$

Encontramos, por fim:

$$p_A \approx 0,75 atm$$

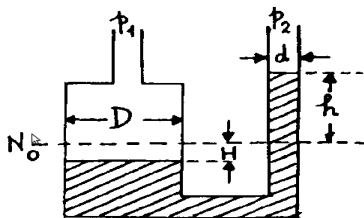
# Exercício 2

## Exercício 2

Seja o manômetro de reservatório a seguir:

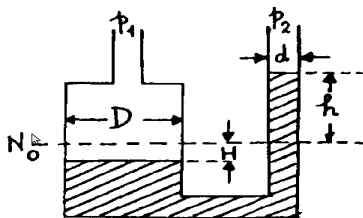
## Exercício 2

Seja o manômetro de reservatório a seguir:



## Exercício 2

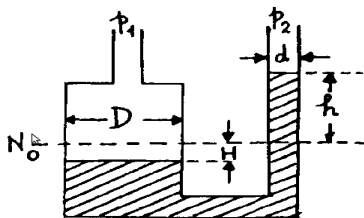
Seja o manômetro de reservatório a seguir:



Para encontrar a diferença de pressão entre os pontos 1 e 2, devemos analisar a situação pós-mudança de nível:

## Exercício 2

Seja o manômetro de reservatório a seguir:



Para encontrar a diferença de pressão entre os pontos 1 e 2, devemos analisar a situação pós-mudança de nível:

$$p_1 = p_2 + \rho_{H_2O} * g * (H + h) \quad (37)$$

A variação de volume deve ser igual nos dois ramos do manômetro.

Logo:

$$V = \pi\left(\frac{D}{d}\right)^2 H = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h$$



A variação de volume deve ser igual nos dois ramos do manômetro.

Logo:

$$V = \pi\left(\frac{D}{d}\right)^2 H = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h \implies$$

A variação de volume deve ser igual nos dois ramos do manômetro.

Logo:

$$V = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 H = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h \implies H = h\left(\frac{d}{D}\right)^2 \quad (38)$$

A variação de volume deve ser igual nos dois ramos do manômetro.

Logo:

$$V = \pi\left(\frac{D}{d}\right)^2 H = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h \implies H = h\left(\frac{d}{D}\right)^2 \quad (38)$$

Substituindo (38) em (37), temos:

A variação de volume deve ser igual nos dois ramos do manômetro.

Logo:

$$V = \pi\left(\frac{D}{d}\right)^2 H = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h \implies H = h\left(\frac{d}{D}\right)^2 \quad (38)$$

Substituindo (38) em (37), temos:

$$p_1 = p_2 + \rho_{H_2O} * g * \left[ h\left(\frac{d}{D}\right)^2 + h \right] \quad (39)$$

A variação de volume deve ser igual nos dois ramos do manômetro.

Logo:

$$V = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 H = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h \implies H = h\left(\frac{d}{D}\right)^2 \quad (38)$$

Substituindo (38) em (37), temos:

$$p_1 = p_2 + \rho_{H_2O} * g * \left[ h\left(\frac{d}{D}\right)^2 + h \right] \quad (39)$$

onde encontramos, por fim:

A variação de volume deve ser igual nos dois ramos do manômetro.

Logo:

$$V = \pi \left(\frac{D}{d}\right)^2 H = \pi \left(\frac{d}{D}\right)^2 h \implies H = h \left(\frac{d}{D}\right)^2 \quad (38)$$

Substituindo (38) em (37), temos:

$$p_1 = p_2 + \rho_{H_2O} * g * \left[ h \left(\frac{d}{D}\right)^2 + h \right] \quad (39)$$

onde encontramos, por fim:

$$p_1 - p_2 = \rho_{H_2O} * g * \left[ \left(\frac{d}{D}\right)^2 + 1 \right] \quad (40)$$

a diferença de pressão entre os pontos nos parâmetros considerados.

# Exercício 3

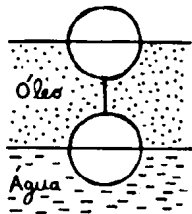
## Exercício 3

Temos duas bolas de mesmo raio  $r = 10\text{cm}$ , presas uma a outra por um fio ideal. A de cima, de cortiça, flutua com metade de seu volume em óleo de densidade  $0,92 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ . A de baixo, de material 6 vezes mais denso que a cortiça, está imersa metade em um fluido, metade em outro.



## Exercício 3

Temos duas bolas de mesmo raio  $r = 10\text{cm}$ , presas uma a outra por um fio ideal. A de cima, de cortiça, flutua com metade de seu volume em óleo de densidade  $0,92 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ . A de baixo, de material 6 vezes mais denso que a cortiça, está imersa metade em um fluido, metade em outro.



Para calcular a densidade da cortiça, analisemos as forças que atuam sobre a bola de cima (bola A):

Para calcular a densidade da cortiça, analisemos as forças que atuam sobre a bola de cima (bola A):

$$|\vec{E}| = |\vec{P}| + |\vec{T}|$$

Para calcular a densidade da cortiça, analisemos as forças que atuam sobre a bola de cima (bola A):

$$|\vec{E}| = |\vec{P}| + |\vec{T}| \implies$$

Para calcular a densidade da cortiça, analisemos as forças que atuam sobre a bola de cima (bola A):

$$|\vec{E}| = |\vec{P}| + |\vec{T}| \implies \rho_{oleo} * g * \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi r^3 = \rho_A * g * \frac{4}{3} \pi r^3 + |\vec{T}| \quad (41)$$

Para calcular a densidade da cortiça, analisemos as forças que atuam sobre a bola de cima (bola A):

$$|\vec{E}| = |\vec{P}| + |\vec{T}| \implies \rho_{oleo} * g * \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi r^3 = \rho_A * g * \frac{4}{3} \pi r^3 + |\vec{T}| \quad (41)$$

Analisemos as forças que atuam sobre a bola de baixo (bola B):

Para calcular a densidade da cortiça, analisemos as forças que atuam sobre a bola de cima (bola A):

$$|\vec{E}| = |\vec{P}| + |\vec{T}| \implies \rho_{oleo} * g * \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi r^3 = \rho_A * g * \frac{4}{3} \pi r^3 + |\vec{T}| \quad (41)$$

Analisemos as forças que atuam sobre a bola de baixo (bola B):

$$|\vec{E}_{H_2O}| + |\vec{E}_{oleo}| + |\vec{T}| = |\vec{P}|$$

Para calcular a densidade da cortiça, analisemos as forças que atuam sobre a bola de cima (bola A):

$$|\vec{E}| = |\vec{P}| + |\vec{T}| \implies \rho_{oleo} * g * \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi r^3 = \rho_A * g * \frac{4}{3} \pi r^3 + |\vec{T}| \quad (41)$$

Analisemos as forças que atuam sobre a bola de baixo (bola B):

$$|\vec{E}_{H_2O}| + |\vec{E}_{oleo}| + |\vec{T}| = |\vec{P}|$$

$$\rho_{H_2O} * g * \frac{4}{3} \pi r^3 + \rho_{oleo} * g * \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi r^3 + |\vec{T}| = \rho_B * g * \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (42)$$



Somando (41) com (42), temos:

$$\rho_{H_2O} * g * \frac{4}{3} \pi r^3 + \rho_{oleo} * g * \frac{4}{3} \pi r^3 = \rho_A * g * \frac{4}{3} \pi r^3 + 6 * \rho_A * g * \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (43)$$

Somando (41) com (42), temos:

$$\rho_{H_2O} * g * \frac{4}{3} \pi r^3 + \rho_{oleo} * g * \frac{4}{3} \pi r^3 = \rho_A * g * \frac{4}{3} \pi r^3 + 6 * \rho_A * g * \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (43)$$

de forma que encontramos:

Somando (41) com (42), temos:

$$\rho_{H_2O} * g * \frac{4}{3} \pi r^3 + \rho_{oleo} * g * \frac{4}{3} \pi r^3 = \rho_A * g * \frac{4}{3} \pi r^3 + 6 * \rho_A * g * \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (43)$$

de forma que encontramos:

$$\frac{1}{2} \rho_{H_2O} + \rho_{oleo} = 6 * \rho_{oleo} + \rho_{H_2O}$$

Somando (41) com (42), temos:

$$\rho_{H_2O} * g * \frac{4}{3} \pi r^3 + \rho_{oleo} * g * \frac{4}{3} \pi r^3 = \rho_A * g * \frac{4}{3} \pi r^3 + 6 * \rho_A * g * \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (43)$$

de forma que encontramos:

$$\frac{1}{2} \rho_{H_2O} + \rho_{oleo} = 6 * \rho_{oleo} + \rho_{H_2O}$$

ou seja:

Somando (41) com (42), temos:

$$\rho_{H_2O} * g * \frac{4}{3} \pi r^3 + \rho_{oleo} * g * \frac{4}{3} \pi r^3 = \rho_A * g * \frac{4}{3} \pi r^3 + 6 * \rho_A * g * \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (43)$$

de forma que encontramos:

$$\frac{1}{2} \rho_{H_2O} + \rho_{oleo} = 6 * \rho_{oleo} + \rho_{H_2O}$$

ou seja:

$$\rho_A = 0,203 \frac{g}{cm^3}$$

Para determinar a tensão no fio, podemos usar a equação (41):

Para determinar a tensão no fio, podemos usar a equação (41):

$$|\vec{T}| = \rho_{oleo} * g * \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi r^3 - \rho_A * g * \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (44)$$

Para determinar a tensão no fio, podemos usar a equação (41):

$$|\vec{T}| = \rho_{oleo} * g * \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi r^3 - \rho_A * g * \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (44)$$

onde encontramos:



Para determinar a tensão no fio, podemos usar a equação (41):

$$|\vec{T}| = \rho_{oleo} * g * \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi r^3 - \rho_A * g * \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (44)$$

onde encontramos:

$$|\vec{T}| = 0,92 * 10 * \left( \frac{4 * 3,14 * 10^3}{6} \right) - \frac{0,2 * 4 * 3,14 * 10^3}{3}$$

Para determinar a tensão no fio, podemos usar a equação (41):

$$|\vec{T}| = \rho_{oleo} * g * \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi r^3 - \rho_A * g * \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (44)$$

onde encontramos:

$$|\vec{T}| = 0,92 * 10 * \left( \frac{4 * 3,14 * 10^3}{6} \right) - \frac{0,2 * 4 * 3,14 * 10^3}{3}$$

ou seja:

$$|\vec{T}| \approx 10,7 N$$